2020 Israel TST teste 6, P2 de 3

Doubt Yourself

André Pinheiro

Janeiro de 2024

Problema

Existe alguma função bijetiva do plano para ele próprio, tal que a imagem de cada circunferência é perímetro de um triângulo?

Problema

Existe alguma função bijetiva do plano para ele próprio, tal que a imagem de cada circunferência é perímetro de um triângulo?

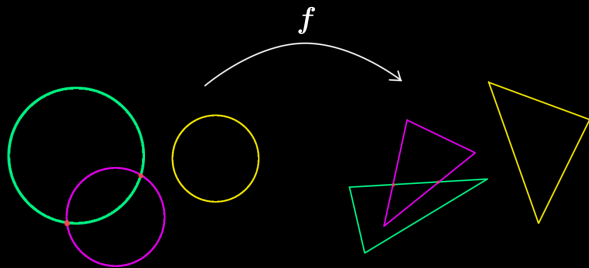



Figure: Representação do problema.

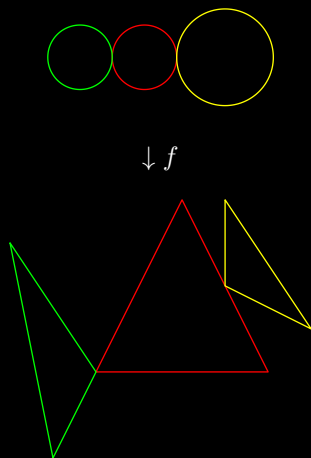
Solução

Seja f a tal função bijetiva. Dado que a função faz uma bijeção entre objetos distintos, isto é, circunferências e triângulos, parece que tal função não existe.

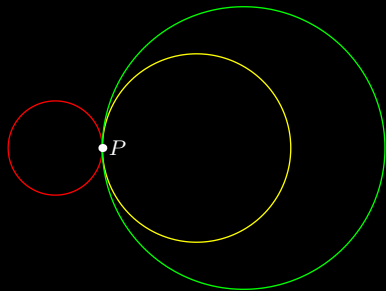
Solução

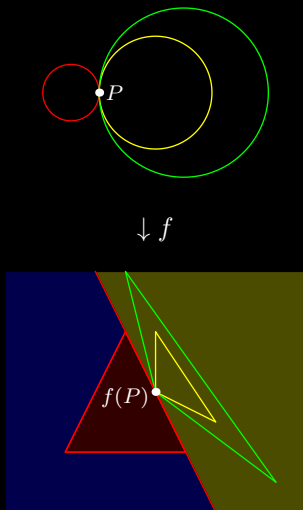
Seja f a tal função bijetiva. Dado que a função faz uma bijeção entre objetos distintos, isto é, circunferências e triângulos, parece que tal função não existe.

Vamos explorar um pouco o problema e ver se isso é verdade, tentando criar maneiras de a função não ser bijetiva.

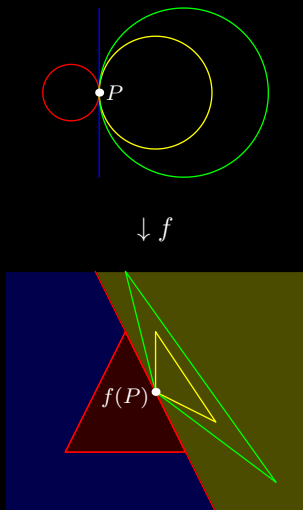
Solução

Ao explorar um pouco o problema, podemos reparar que quando temos circunferências tangentes, podemos ter dois triângulos que compartilham o mesmo vértice ou o vértice de um triângulo está contido no lado do outro triângulo.

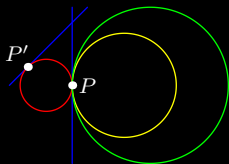
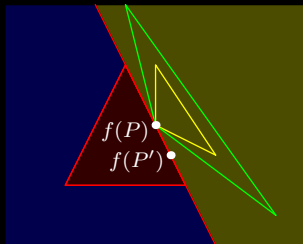
Dado que a interseção de circunferências em dois pontos é um cenário mais complicado de trabalhar, dado que há várias formas de ocorrer interseção de dois pontos entre triângulos, vamos trabalhar com tangência entre circunferências, que é um cenário mais simples.

Solução

Ao trabalhar de várias formas com circunferências tangentes, temos um cenário bastante peculiar: quando temos várias circunferências tangentes num mesmo ponto, vamos chamar-lhe de P.

Solução

Seja S a circunferência a vermelho e P tal que $f(P)$ pertence ao lado do triângulo vermelho, ie, $f(P)$ pertence ao lado de $f(S)$. Seja também l a reta do lado que contém $f(P)$ e a região a azul, a região amarela a parte do plano que não contém $f(S)$, o interior de $f(S)$ de vermelho e azul a região que sobre.

Repara que para qualquer circunferência S' tangente em P, $f(S')$ interseta $f(S)$ em um único ponto. Consequentemente $f(S')$ está na região vermelha ou amarela.

Solução

Dado que sobram as imagens dos pontos da reta tangente a ponto P, podemos concluir que a imagem inversa da região azul está contida na reta tangente ao ponto P.

Solução

Basta agora repetir o mesmo raciocínio. Agora com outro ponto P' de S tal que $f(P')$ pertence ao mesmo lado de $f(S)$ que está $f(P)$.

Como temos que a imagem inversa da região azul também está contida na reta tangente ao ponto P', o que contradiz com o facto de f ser bijetiva. ■